

第2讲二次函数交点问题

一、直线与二次函数的交点问题

1. 求一次函数与二次函数的交点

典题精练

1. 当 k 为何值时，函数 $y = -2x^2 + 5x + k$ 的图象与直线 $y = x - k$ 只有一个公共点，有两个公共点，没有公共点。

2. 已知：二次函数 $y = x^2 - 4x + 3a + 2$ （ a 为常数）。

（1）请写出该二次函数的三条性质。

（2）在同一直角坐标系中，若该二次函数的图象在 $x \leq 4$ 的部分与一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象有两个交点，求 a 的取值范围。

2. 直线与抛物线平移中的交点问题

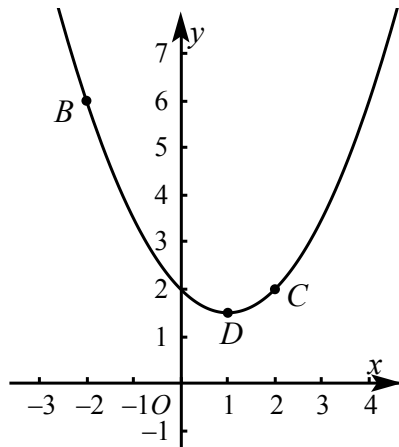
典题精练

3. 已知：抛物线与 x 轴交于 $A(-2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，与 y 轴交于 $C(0, 4)$ 。

(1) 求抛物线顶点 D 的坐标。

(2) 设直线 CD 交 x 轴于点 E ，过点 B 作 x 轴的垂线，交直线 CD 于点 F ，将抛物线沿其对称轴上下平移，使抛物线与线段 EF 总有公共点。试探究：抛物线向上最多可以平移多少个单位长度，向下最多可以平移多少个单位长度？

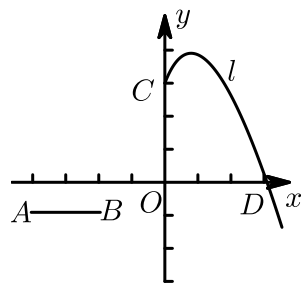
4. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 过点 $B(-2, 6)$ ， $C(2, 2)$ 两点。



(1) 试求抛物线的解析式。

(2) 记抛物线顶点坐标为 D ，若直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 向上平移 b 个单位所得的直线与抛物线段 BDC （包括端点 B 、 C ）部分有两个交点，求 b 的取值范围。

5. 已知点 $O(0,0)$ ， $A(-4,-1)$ ，线段 AB 与 x 轴平行，且 $AB=2$ ，抛物线 $G: y = -x^2 + mx + n$ (m, n 为常数) 经过点 $C(0,3)$ 和 $D(3,0)$ 。

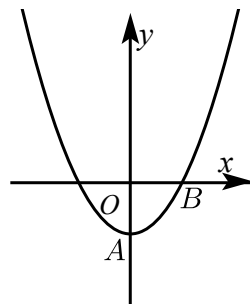


- (1) 求 G 的解析式及其对称轴和顶点坐标。
- (2) 判断点 B 是否在 G 上，并说明理由。
- (3) 若线段 AB 以每秒2个单位长的速度向下平移，设平移的时间为 t (秒)。
- ① 若 G 与线段 AB 总有公共点，直接写出 t 的取值范围。
 - ② 若 G 同时以每秒3个单位长的速度向下平移， G 在 y 轴及其右侧图象与直线 AB 总有两个公共点，求 t 的取值范围。
6. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ 的顶点为 D 。线段 AB 的两个端点分别为 $A(-3, m)$ ， $B(1, m)$ 。
- (1) 求点 D 的坐标 (用含 m 的代数式表示)。
- (2) 若该抛物线经过点 $B(1, m)$ ，求 m 的值。
- (3) 若线段 AB 与该抛物线只有一个公共点，结合函数的图象，求 m 的取值范围。

3. 直线旋转中的交点问题

典题精练

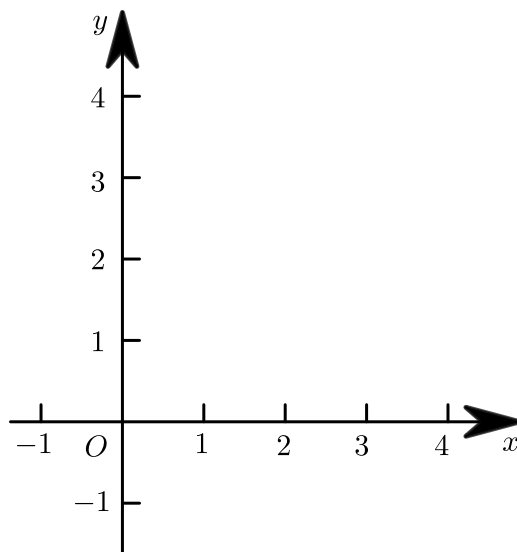
7. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $C_1: y = ax^2 - a^2 (a > 0)$ ，经过点 $B(1, 0)$ ，顶点为 A 。



- (1) 求抛物线 C_1 的解析式。
- (2) 将抛物线 C_1 绕点 B 旋转 180° 后得到抛物线 C_3 ，直线 $y = kx - 2k + 4$ 总经过一定点 M ，若过定点 M 的直线 l 与抛物线 C_3 只有一个公共点，求直线 l 的解析式。

8. 已知：关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + (m+1)x + (m+2) = 0 (m > 0)$ 。

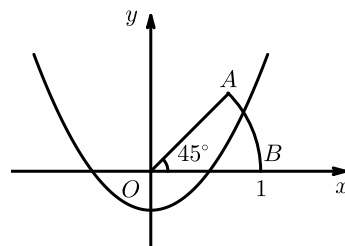
- (1) 求证：该方程有两个不相等的实数根。
- (2) 当抛物线 $y = -x^2 + (m+1)x + (m+2)$ 经过点 $(3, 0)$ ，求该抛物线的表达式。
- (3) 在(2)的条件下，记抛物线 $y = -x^2 + (m+1)x + (m+2)$ 在第一象限之间的部分为图象 G ，如果直线 $y = k(x+1) + 4$ 与图象 G 有公共点，请结合函数的图象，求直线 $y = k(x+1) + 4$ 与 y 轴交点的纵坐标 t 的取值范围。



4. 几何图形与抛物线平移中的交点个数问题

典题精练

9. 如图，以扇形 OAB 的顶点 O 为原点，半径 OB 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，其中点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ，若抛物线 $y = x^2 + k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，则实数 k 的取值范围是 _____ .

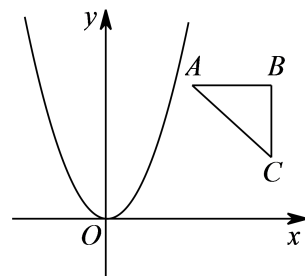


10. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -\frac{m-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}mx + m^2 - 3m + 2$ 与 x 轴的交点分别为原点 O 和点 A ，点 $B(4, n)$ 在这条抛物线上 .
- (1) 求抛物线的表达式及点 B 的坐标 .
 - (2) 连接 AB ，将线段 AB 平移至 OC ，使得点 A 与点 O 重合，请直接写出点 C 的坐标 .
 - (3) 在 (2) 的条件下，将抛物线向左平移 $k(k > 0)$ 个单位，请你结合图象回答：当平移后的抛物线与四边形 $OABC$ 有两个公共点时，求 k 的取值范围 .

5. 抛物线开口变化中的交点问题

典题精练

11. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(1, 2)$ ， $B(2, 2)$ ， $C(2, 1)$ ，若抛物线 $y = ax^2$ 与该直角三角形无公共点，则 a 的取值范围是_____.



12. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 4x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A ， B ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3a$ 经过点 A ，将点 B 向右平移5个单位长度，得到点 C ．
- (1) 求点 C 的坐标．
 - (2) 求抛物线的对称轴．
 - (3) 若抛物线与线段 BC 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围．

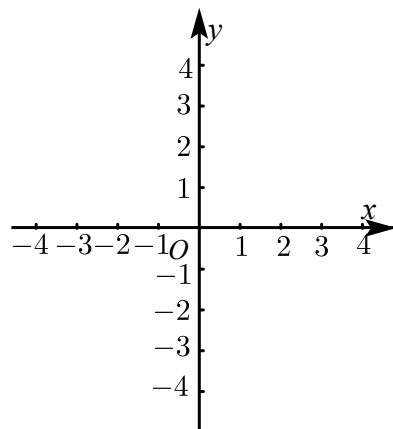
6. 复杂变化中的交点问题

典题精练

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{a}$ 的对称轴与 x 轴交于点 A ．

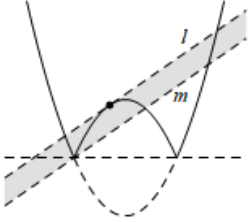
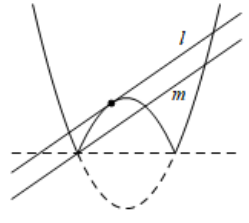
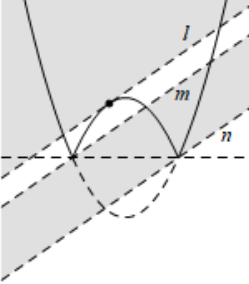
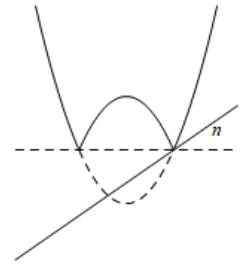
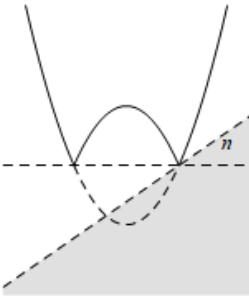
(1) 若抛物线与 x 轴交于 P, Q 两点，且 $PQ = 2$ ，求抛物线的解析式．

(2) 点 B 的坐标为 $(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{a})$ ，若该抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，结合函数图象，直接写出 a 的取值范围．



二、直线与翻折后的抛物线的交点问题

1. 抛物线沿水平直线翻折

图象	直线范围或位置	交点个数
	直线 l , m 之间	4个
	直线 l 或直线 m	3个
	直线 l 上方或 直线 m , n 之间	2个
	直线 n	1个
	直线 n 下方	0个

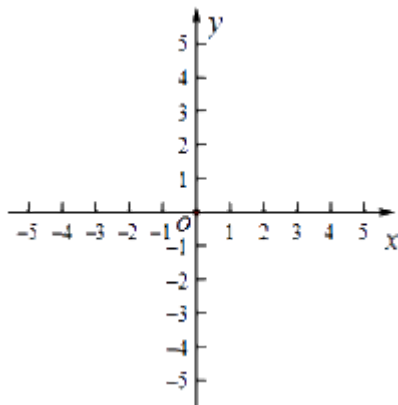
 典题精练

14. 已知：抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(2, -3)$ 和 $B(4, 5)$.

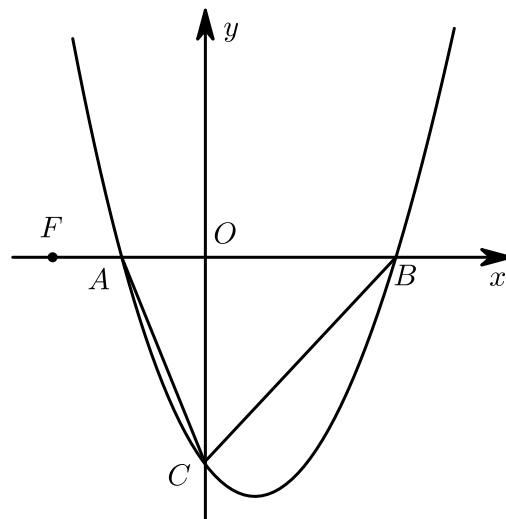
(1) 求抛物线的表达式及顶点坐标 .

(2) 将抛物线沿 x 轴翻折，得到图象 G_1 ，求图象 G_1 的表达式 .

(3) 设 B 点关于对称轴的对称点为 E ，抛物线 $G_2 : y = ax^2 (a \neq 0)$ 与线段 EB 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围 .

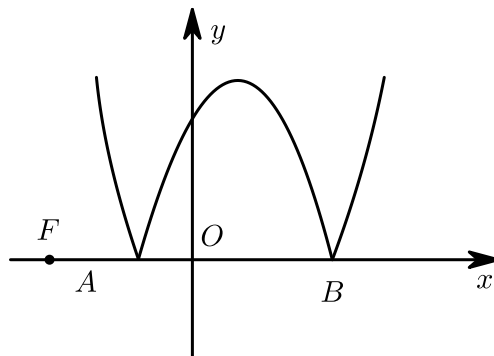


15. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，交 y 轴于点 C 。



(1) 求此抛物线的解析式。

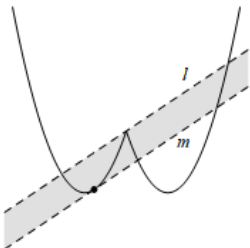
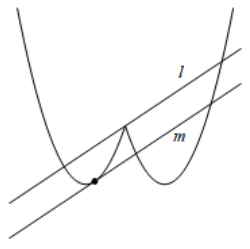
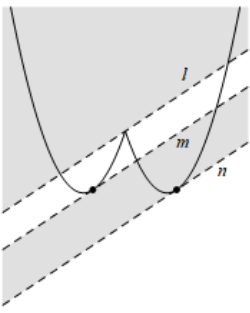
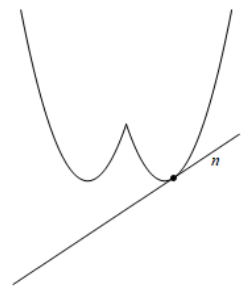
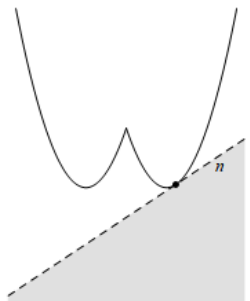
(2) 如图，将抛物线在 A 、 B 间的部分沿 x 轴向上翻折，翻折后的图形与原来抛物线的剩余部分组成一个新图形 C_2 ，若过点 $F(-2, 0)$ 的直线 $l: y = kx + b$ (k, b 为常数) 与图形 C_2 只有两个公共点，求 k 的取值范围。



16. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ 上，过点 P 作 y 轴的垂线 l ，垂足为 $D(0, d)$ ．将抛物线在直线 l 上方的部分沿直线 l 翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新图象 G ．当图象 G 与直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 只有两个公共点时，求 d 的取值范围．

17. 若二次函数 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$ 的图象与 y 轴的交点为 A ，过点 A 作直线 $l \parallel x$ 轴，将抛物线在 y 轴左侧部分沿直线 l 翻折，其余部分保持不变，得到一个新图象，直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 与新图象只有一个公共点 $P(x_0, y_0)$ ，且 $y_0 \leq 7$ ，求 b 的取值范围．

2. 抛物线沿竖直直线翻折

图象	直线范围或位置	交点个数
	直线 l , m 之间	4个
	直线 l 或直线 m	3个
	直线 l 上方或 直线 m , n 之间	2个
	直线 n	1个
	直线 n 下方	0个

 典题精练

18. 如图，将函数 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 0$) 的图象沿 y 轴翻折得到一个新的图象，前后两个图象其实就是函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象.

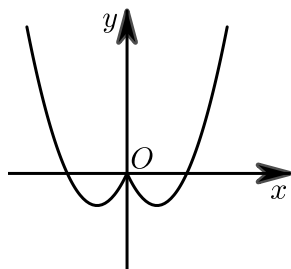


图 1

(1) 观察思考：

函数图象与 x 轴有 _____ 个交点，所以对应的方程 $x^2 - 2|x| = 0$ 有 _____ 个实数根，方程 $x^2 - 2|x| = 2$ 有 _____ 个实数根，关于 x 的方程 $x^2 - 2|x| = a$ 有 4 个实数根时， a 的取值范围是 _____.

(2) 拓展探究：

- ① 如图2，将直线 $y = x + 1$ 向下平移 b 个单位，与 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象有三个交点，求 b 的值.

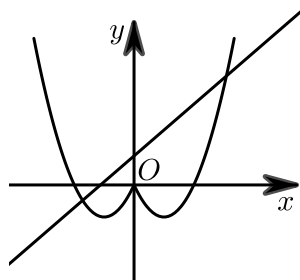


图 2

- ② 如图3，将直线 $y = kx$ ($k > 0$) 绕着原点旋转，与 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象交于 A, B 两点 (A 左 B 右)，直线 $x = 1$ 上有一点 P ，在直线 $y = kx$ ($k > 0$) 旋转的过程中，是否存在某一时刻， $\triangle PAB$ 是一个以 AB 为斜边的等腰直角三角形 (点 P, A, B 按顺时针方向排列). 若存在，请求出 k 值，若不存在，请说明理由.

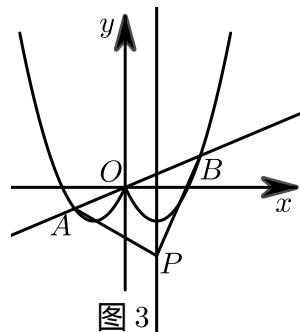


图 3

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + 4x + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(3, -4)$ 和 $B(0, 2)$.

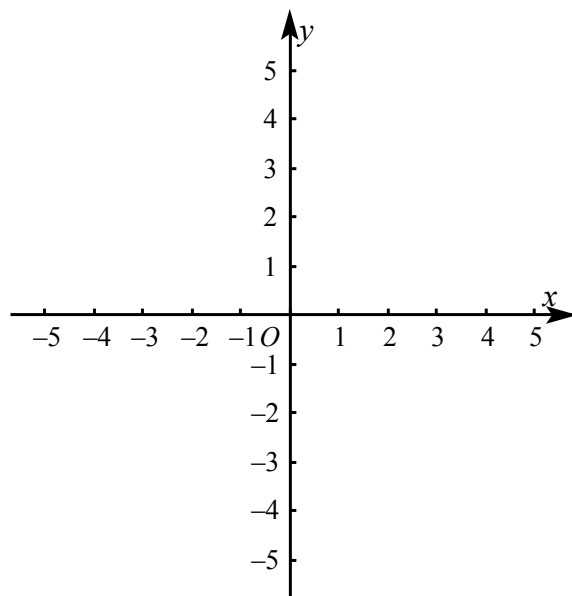
(1) 求抛物线的表达式和顶点坐标.

(2) 将抛物线在 A 、 B 之间的部分记为图象 M (含 A 、 B 两点). 将图象 M 沿直线 $x = 3$ 翻折, 得到图象 N . 若过点 $C(9, 4)$ 的直线 $y = kx + b$ 与图象 M 、图象 N 都相交, 且只有两个交点, 求 b 的取值范围.

三、 抛物线开口大小与整点问题

典题精练

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = mx^2 - 2mx + m - 1 (m > 0)$ 与 x 轴的交点为 A, B .



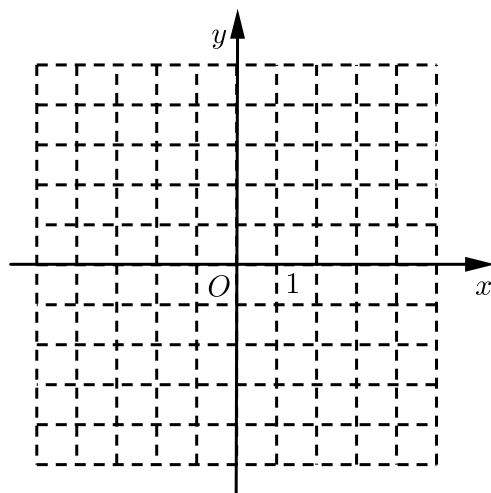
(1) 求抛物线的顶点坐标 .

(2) 横、纵坐标都是整数的点叫做整点 .

① 当 $m = 1$ 时，求线段 AB 上整点的个数 .

② 若抛物线在点 A, B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内（包括边界）恰有6个整点，结合函数的图象，求 m 的取值范围 .

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a \neq 0)$ 的顶点为 D ，与 x 轴交于 A, B 两点（ A 在 B 的左侧）。



- (1) 当 $a = 1$ 时，求点 A, B, D 的坐标。
- (2) 横，纵坐标都是整数的点叫做整点。若抛物线在点 A, B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内（不含边界）恰有7个整点，结合函数图象，求 a 的取值范围。

四、分段函数

22. 已知函数 $y = \begin{cases} -x^2 + nx + n, & (x \geq n) \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{n}{2}x + \frac{n}{2}, & (x < n) \end{cases}$ (n 为常数) .

(1) 当 $n = 5$ 时 ,

① 点 $P(4, b)$ 在此函数图象上 , 求 b 的值 .

② 求此函数的最大值 .

(2) 已知线段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(2, 2)$, $B(4, 2)$, 当此函数的图象与线段 AB 只有一个交点时 , 直接写出 n 的取值范围 .

(3) 当此函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时 , 求 n 的取值范围 .